

## **Введение в современную топологию (топология двумерных поверхностей)**

***Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, осень 2011***

### **Цель курса**

Познакомить студентов с некоторыми понятиями топологии (эйлерова характеристика, накрытие, фундаментальная группа) на примере двумерных поверхностей.

### **Список тем**

1. Классификация двумерных поверхностей.
  - a) Примеры поверхностей. Какие поверхности считать одинаковыми? Гомеоморфизм.
  - b) Простейшие инварианты: ориентируемость, количество компонент связности края.
  - c) Триангуляция. Существование триангуляции (без доказательства).
  - d) Развёртка поверхности (многоугольник с правилом склейки сторон). Эквивалентные преобразования развёрток.
  - e) Приведение развёртки к стандартному виду эквивалентными преобразованиями.
  - f) Графы на поверхностях. Эйлерова характеристика.
  - g) Теорема о классификации двумерных поверхностей.
2. Накрытия и фундаментальная группа.
  - a) Пространство петель: умножение петель, гомотопность петель. Индекс петли на плоскости относительно точки.
  - b) Определение абстрактной группы.
  - c) Конечные и бесконечные группы. Абелевы и неабелевы группы.
  - d) Свободная абелева группа, свободная группа. Группа перестановок.
  - e) Основные конструкции теории групп: гомоморфизм, фактор-группа. Теорема о гомоморфизме. Задание группы образующими и соотношениями.
  - f) Накрытия. Поднятие пути. Использование накрытий для доказательства нестягиваемости петель. Некоммутативность фундаментальной группы кренделя.
  - g) Связь фундаментальных групп накрывающего пространства и базы.
  - h) Универсальное накрытие. Использование для вычисления фундаментальной группы.
  - i) Вычисление фундаментальной группы сферы с  $g$  ручками.

### **Примерный список задач**

1. Разрежьте бутылку Клейна на два листа Мебиуса.

2. Докажите, что из тора нельзя вырезать ленту Мебиуса.
3. Постройте триангуляцию тора.
4. Приведите данную развертку к стандартному виду с помощью эквивалентных преобразований. Выясните, какая двумерная поверхность получается в результате склейки.
5. Докажите, что граф  $K_5$  (полный граф на 5 вершинах) нельзя нарисовать на плоскости так, чтобы его ребра не пересекались.
6. Нарисуйте граф  $K_5$  (полный граф на 5 вершинах) на торе так, чтобы его ребра не пересекались.
7. Найдите эйлерову характеристику сферы с  $g$  ручками.
8. Докажите, что группа перестановок  $S_n$ ,  $n \geq 3$ , некоммутативна.
9. Какая группа задаётся образующими  $a, b$  и соотношением  $aba^{-1}b^{-1}=1$ ?
10. Постройте универсальное накрытие над плоскостью с выколотой точкой и найдите её фундаментальную группу.
11. Постройте универсальное накрытие над листом Мебиуса и найдите его фундаментальную группу.
12. Постройте универсальное накрытие над тором и найдите его фундаментальную группу.
13. Постройте универсальное накрытие над проективной плоскостью и найдите её фундаментальную группу.
14. Постройте универсальное накрытие над бутылкой Клейна и найдите её фундаментальную группу.

## Формы контроля и критерии оценки

В итоговой оценке учитываются следующие формы контроля со следующими коэффициентами:

- письменные домашние задания, коэффициент 0,5;
- работа на семинарах, коэффициент 0,2;
- итоговая контрольная работа, коэффициент 0,3.

Итоговая контрольная работа не является блокирующей.

## Список литературы

1. В. Б. Алексеев, «Теорема Абеля в задачах и решениях», М.: МЦНМО, 2001, 191 с.
2. В. Г. Болтянский и В. А. Ефремович, «Наглядная топология», М.: Наука, 1982, 160 с.
3. В. А. Зорич, «Математический анализ», М.: МЦНМО, 2007, 1488 с.
4. В. В. Прасолов, «Наглядная топология», М.: МЦНМО, 2006, 112 с.
5. С. Г. Смирнов, «Прогулки по замкнутым поверхностям», М.: МЦНМО, 2003, 28 с.